

# مبانی ریاضی مکانیک کوانتومی

وحیدکریمی پور - دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۲۶ دی ۱۴۰۴

## ۱ مقدمه

در این درس با ریاضیات مورد نیاز برای فهم چارچوب نظری مکانیک کوانتومی آشنایی خواهیم داشت. نخست فضاهای برداری را با محدودیت را بررسی می‌کنیم و سپس به فضاهای برداری بی‌نهایت بعدی خواهیم پرداخت که این قسمت در ضمیمه‌ها نوشته شده است زیرا فهمیدن آن برای درک بقیه فصل‌ها ضروری نیست. بنابراین خواننده می‌تواند از خواندن ضمیمه‌ها صرف نظر کند.

## ۲ فضای برداری

مجموعه  $V$  را یک فضای برداری روی میدان اعداد  $F$  می‌گوییم هرگاه دو عمل زیر تعریف شده

$$+ : V \times V \longrightarrow V \quad \text{و} \quad \cdot : F \times V \longrightarrow V \quad (۱)$$

و دارای خاصیت‌های زیر باشند:

$$A1 : \quad x + y = y + x$$

$$A2 : \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$A3 : \quad \exists 0 \in V \mid \quad 0 + x = x$$

$$A4 : \quad \forall x \in V \quad \exists -x \in V \mid \quad -x + x = 0,$$

$$M1 : \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$$M2 : \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$M3 : \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

$$M4 : \quad 1x = x. \quad (۲)$$

بسته به این که  $F$  میدان اعداد حقیقی  $R$  یا میدان اعداد مختلط  $C$  باشد، فضای برداری  $V$  را فضای برداری حقیقی یا مختلط می گوئیم.

**مثال ها:** مجموعه های زیر هرکدام یک فضای برداری هستند.

۱ -  $R^n$  یا مجموعه  $n$  تایی های مرتب حقیقی،

۲ -  $C^n$  یا مجموعه  $n$  تایی مرتب مختلط،

۳ -  $M_{m \times n}(F)$  یا مجموعه ماتریس های  $m \times n$  که درایه های آن عناصر یک میدان  $F$  هستند،

۴ -  $P_n([a, b])$  یا مجموعه چندجمله های  $n$  مرتبه حقیقی مرتبه  $n$  از متغیر  $x$  که درفاصله  $[a, b]$  تعریف شده اند ،

۵ -  $C^k[a, b]$  یا مجموعه توابع حقیقی یا مختلط  $k$  بار مشتق پذیر درفاصله  $[a, b]$ .

ازاین به بعد منحصرأ با فضاهاى بردارى مختلط کار مى کنیم.

**تعریف:** هرگاه  $V$  یک فضای برداری و  $W \subset V$  زیرمجموعه ای از آن باشد، آنگاه  $W$  را یک زیرفضای  $V$  می گوییم اگر  $W$  نسبت به جمع بردارها و ضرب اعداد در بردارها بسته باشد.

## ۱.۲ ضرب داخلی و اندازه

**تعریف:** در یک فضای برداری  $V$  یک عمل دوتایی  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow C$  را یک ضرب داخلی می نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

$$\begin{aligned}\langle x, y + \alpha z \rangle &= \langle x, y \rangle + \alpha \langle x, z \rangle \\ \langle x, y \rangle &= \langle y, x \rangle^* \\ \langle x, x \rangle &\geq 0 \\ \langle x, x \rangle &= 0 \longrightarrow x = 0.\end{aligned}\tag{۳}$$

**مثالهایی از ضرب داخلی:**

الف - در  $C^n$ :

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i^* y_i \tag{۴}$$

ب - در  $M_{n,m}$ :

$$\langle A, B \rangle := \text{tr}(AB^\dagger) \tag{۵}$$

ج - در  $C^k[a, b]$ :

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f^*(x)g(x)dx. \tag{۶}$$

فضایی را که به یک ضرب داخلی مجهز شده باشد یک فضای بردای ضرب داخلی یا *Inner product space* می گوییم.

قضیه کوشی-شوارتز: در یک فضای ضرب داخلی داریم:

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle. \quad (۷)$$

اثبات: بردار  $v := \alpha x + y$  را در نظر می گیریم. داریم

$$\begin{aligned} f(\alpha, \alpha^*) &:= \langle v, v \rangle \geq 0 \longrightarrow \langle \alpha x + y, \alpha x + y \rangle \geq 0 \\ &\longrightarrow |\alpha|^2 \langle x, x \rangle + \alpha^* \langle x, y \rangle + \alpha \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \geq 0. \end{aligned} \quad (۸)$$

هرگاه کمینه تابع  $f$  را پیدا کنیم به نامساوی کوشی شوارتز می رسیم.

### اندازه یک بردار:

در فضای ضرب داخلی می توان اندازه یک بردار را به شکل زیر تعریف کرد:

$$|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle}. \quad (۹)$$

باتوجه به نامساوی کوشی شوارتز می توان نوشت :

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| |y|. \quad (۱۰)$$

### مثال هایی از اندازه یک بردار:

الف -  $C^n$ :

$$|x|^2 := \sum_{i=1}^n x_i^* x_i \quad (۱۱)$$

ب - در  $M_{n,m}$

$$|A|^2 := tr(AA^\dagger) \quad (۱۲)$$

ج - در  $C^k[a, b]$ .

$$|f| := \int_a^b f^*(x)f(x)dx. \quad (۱۳)$$

ازنامساوی کوشی شوارتز دو نتیجه مهم حاصل می شود. یکی تعریف زاویه بین دو بردار به صورت

$$\cos \phi := \frac{|\langle x, y \rangle|}{|x||y|} \quad (۱۴)$$

ودیگری نامساوی مثلث:

$$|x + y| \leq |x| + |y|. \quad (۱۵)$$

**فضای نُرْم دار یا اندازه دار:** یک فضای برداری  $V$  که در آن نگاشت  $\| \cdot \| : V \longrightarrow R$  تعریف شده باشد را فضای اندازه دار یا *Normed Space* می گوئیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

$$\begin{aligned} \|v\| &\geq 0 \quad \forall v \\ \|v\| &= 0 \longrightarrow v = 0 \\ \|\alpha v\| &= |\alpha| \|v\| \\ \|v + w\| &\leq \|v\| + \|w\|. \end{aligned} \quad (۱۶)$$

هرفضای ضرب داخلی باهمان اندازه ای که ازروی ضرب داخلی تعریف می شود یک فضای اندازه داراست، ولی یک فضای اندازه دار الزاماً یک فضای ضرب داخلی نیست. به عبارت دیگر یک اندازه لزوماً ازروی یک ضرب داخلی تعریف نشده است. به عنوان مثال درفضای توابع  $C[a, b]$  نگاشت  $\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$  یک اندازه است که ازروی یک ضرب داخلی تعریف نشده است.

## ۲.۲ پایه

پایه بهنجار  $\{e_i, i = 1, \dots, N\}$  را برای فضای  $V$  درنظرمی گیریم. بهنجاربودن به معنای آن است که  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ . هربردار  $x \in V$  را می توان برحسب این بردارهای پایه بسط داد ونوشت:

$$x = \sum_{i=1}^N x_i e_i. \quad (۱۷)$$

بدیهی است که

$$x_i = \langle e_i, x \rangle. \quad (۱۸)$$

### روش گرام اشمیت برای ساختن پایه بهنجار

در یک فضای ضرب داخلی، از یک پایه دلخواه مثل  $\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$  می توان به روش زیر که به روش گرام-اشمیت<sup>۱</sup> موسوم است یک پایه بهنجار ساخت:

قرار می دهیم:

$$e_1 := \frac{v_1}{|v_1|}, \quad e_2 := \frac{v_2 - \langle e_1, v_2 \rangle e_1}{|v_2 - \langle e_1, v_2 \rangle e_1|}, \quad e_3 := \frac{v_3 - \langle e_1, v_3 \rangle e_1 - \langle e_2, v_3 \rangle e_2}{|v_3 - \langle e_1, v_3 \rangle e_1 - \langle e_2, v_3 \rangle e_2|}, \dots \quad (۱۹)$$

خواننده می تواند براحتی تحقیق کند که پایه جدید بهنجار است. تعبیر هندسی روش بالا نیز روشن وساده است.

### مثالهایی از پایه های بهنجار:

الف - در  $R^n$  و  $C^n$ :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (۲۰)$$

ب - در  $M_{\mu \times n}(C), M_{m \times n}(R)$ :

$$E_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1 \dots n, \quad (۲۱)$$

---

<sup>۱</sup> Gram-Schmidt

که در آن  $E_{ij}$  ماتریسی است که درایه  $(i, j)$  آن برابر با ۱ و بقیه درایه های آن برابر با صفر است.

ج - در  $C^k[a, b]$ ، مجموعه  $\{e_n(x), f_n(x), n = 0 \dots \infty\}$  با تعریف

$$e_n(x) := \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin\left(\frac{n\pi}{b-a}x\right), \quad f_n := \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos\left(\frac{n\pi}{b-a}x\right). \quad (22)$$

د - در  $P_n[a, b]$ ، می توان یک پایه مثل  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  در نظر گرفت و آن را با فرایند گرام-اشمیت بهنجار کرد. تکمیل این تمرین را به خواننده واگذار می کنیم.

در فضای محدود بعد وقتی که یک پایه انتخاب کردیم، می توانیم در آن پایه مولفه های بردار  $x$  را به صورت یک ماتریس ستونی به شکل زیر بنویسیم:

$$x \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}. \quad (23)$$

در این حالت مولفه های بردارهای پایه به صورت زیر خواهند بود:

$$e_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad e_N \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

هرگاه به جای پایه  $\{e_i\}$  پایه  $\{e'_i\}$  را در نظر بگیریم که در آن  $e'_i = S_{li}e_l$  آنگاه خواهیم داشت

$$x'_i = \langle e'_i, x \rangle = \langle S_{li}e_l, x \rangle = S_{li}x_l, \quad (25)$$

و یا به صورت فشرده تر:

$$x' = xS. \quad (26)$$

از آنجا که پایه های  $\{e_i\}$  و  $\{e'_i\}$  هر دو بهنجار هستند براحتی نتیجه می گیریم که ماتریس تبدیل پایه  $S$  در شرط زیر صدق می کند:

$$S^\dagger S = I \quad (27)$$

چنین ماتریس هایی را ماتریس های یکانی می گوئیم.

بدنیست در اینجا به یک تعریف دیگر اشاره کنیم. هرگاه ماتریسی بالحقاقی خود برابر باشد، آن ماتریس را خودالقا یا  $Self - Adjoint$  یا هرمیتی می گوئیم.

## ۳.۲ فضای کامل، فضای باناخ و فضای هیلبرت

**دنباله کوشی:** <sup>۲</sup> در یک فضای برداری دنباله ای از بردارها مثل  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  در نظر می گیریم. این دنباله یک دنباله کوشی نامیده می شود هرگاه فاصله بین بردارها به تدریج کم شود. به عبارت دقیقتر هرگاه به ازای هر  $\epsilon > 0$  عددی مثل  $N$  یافت شود به قسمی که

$$\forall m, n > N \longrightarrow |x_n - x_m| \leq \epsilon. \quad (28)$$

در یک فضای برداری حد یک دنباله کوشی لزوماً در خود فضا قرار ندارد. به عنوان مثال هرگاه میدان اعداد گویا را به عنوان یک فضای برداری روی خودش در نظر بگیریم دنباله  $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$  اگرچه یک دنباله کوشی است، ولی حد آن در داخل میدان اعداد گویا قرار ندارد. با افزودن اعداد گنگ به اعداد گویا میدان اعداد حقیقی بدست می آید که کامل است یعنی حد دنباله های کوشی را در خود دارد.

---

<sup>۲</sup>Cauchy Sequence

**فضای برداری کامل:** <sup>۳</sup> یک فضای برداری را فضای برداری کامل می‌گوییم هرگاه حد دنباله های کوشی رادرخود داشته باشد.

**فضای باناخ:** <sup>۴</sup> یک فضای برداری نرم دار را که کامل باشد فضای باناخ می‌نامیم.

**فضای هیلبرت:** <sup>۵</sup> یک فضای ضرب داخلی را که کامل باشد فضای هیلبرت می‌نامیم. از آنجا که میدان اعداد حقیقی و مختلط کامل هستند، می‌توان ثابت کرد که هر فضای محدود بعدی که روی این میدان ها ساخته می‌شود نیز کامل بوده و بنابراین یک فضای هیلبرت است.

مثال: فضای توابع حقیقی  $C[-1, 1]$  را با ضرب داخلی استاندارد  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^2 f(x)g(x)dx$  در نظر می‌گیریم. در این فضا دنباله توابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & x \leq -\frac{1}{n} \\ \frac{1}{2}(nx + 1) & -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} \leq x \end{cases} \quad (29)$$

خواننده می‌تواند براحتی نشان دهد که این دنباله یک دنباله کوشی است. اما حد این دنباله تابع ناپیوسته پله است که در فضای  $C[-1, 1]$  قرار ندارد. بنابراین  $C[-1, 1]$  یک فضای هیلبرت نیست.

**فضای  $L_w^2[a, b]$ :** فضای توابع مختلط با ضرب داخلی  $\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x)f^*(x)g(x)dx$  که در آن  $w$  یک تابع دلخواه مثبت است با شرط  $\|f\| < \infty$  یک فضای هیلبرت است. برای اثبات این قضیه و قضیه زیر، خواننده می‌بایست به کتاب های آنالیز یا آنالیز تابعی مراجعه کند.

**قضیه:** هر فضای هیلبرت با فضایی مثل  $L_w^2[a, b]$  یکسان است.

---

Complete Vector Space<sup>۳</sup>

Banach Space<sup>۴</sup>

Hilbert Space<sup>۵</sup>

### ۳ تبدیلات خطی

در یک فضای برداری  $V$ ، نگاشت  $\hat{T} : V \rightarrow V$  را یک تبدیل خطی یا عملگر خطی *Linear operator* می‌گوییم هرگاه دارای خاصیت زیرباشد:

$$\hat{T}(x + \alpha y) = \hat{T}(x) + \alpha \hat{T}(y) \quad \forall \alpha \in F, \quad x, y \in V. \quad (30)$$

بدلیل خطی بودن، یک عملگر خطی تنها با اثرش روی بردارهای پایه مشخص می‌شود. می‌نویسیم:

$$\hat{T}e_i = \sum_{j=1}^N T_{ji} e_j \quad (31)$$

ماتریس  $T$  با درایه‌های  $T_{mn}$  را ماتریس مربوط به تبدیل خطی  $\hat{T}$  در پایه  $\{e_i\}$  می‌گوییم. هرگاه پایه فوق بهنجار باشد می‌توانیم بنویسیم

$$\langle e_j, \hat{T}e_i \rangle = T_{ji}. \quad (32)$$

اثر تبدیل خطی  $\hat{T}$  روی یک بردار  $x$  عبارت خواهد بود از:

$$\hat{T}x = \hat{T}x_i e_i = x_i (\hat{T}e_i) = x_i T_{ji} e_j = (T_{ji} x_i) e_j = (Tx)_j e_j \quad (33)$$

بنابراین اثر تبدیل خطی  $\hat{T}$  روی  $x$  آن است که ماتریس تبدیل خطی  $T$  از چپ در ماتریس ستونی  $x$  ضرب می‌شود.

هرگاه پایه را عوض کنیم ماتریس تبدیل خطی نیز عوض خواهد شد. اگر به جای پایه  $\{e_i\}$  پایه  $\{e'_i\}$  را در نظر بگیریم که در آن  $e'_i = S_{li} e_l$  آنگاه خواهیم داشت

$$T'_{ij} = \langle e'_i, \hat{T}e'_j \rangle = \langle S_{li} e_l, \hat{T} S_{mj} e_m \rangle = S_{li}^* T_{lm} S_{mj}, \quad (34)$$

که به صورت فشرده زیرقابل بازنویسی است:

$$T' = S^\dagger T S, \quad (35)$$

که در آن  $S^\dagger$  با الحاقی ماتریس  $S$  خوانده می شود و چنین تعریف می شود:

$$S^\dagger = (S^*)^T, \quad \text{یا} \quad S_{ij}^\dagger = (S^*)_{ji}. \quad (۳۶)$$

هرگاه  $\hat{A}$  و  $\hat{B}$  دوتبدیل خطی دلخواه روی  $V$  و  $\alpha$  عددی دلخواه متعلق به میدان  $F$  باشد، آنگاه  $\alpha\hat{A} + \hat{B}$  نیز یک تبدیل خطی روی  $V$  است. بنابراین مجموعه تبدیلات خطی روی  $V$  تشکیل یک فضای برداری می دهد که آن را با  $End(V)$  نمایش می دهیم. هم چنین ضرب دو تبدیل خطی با تعریف

$$(\hat{A}\hat{B})x := \hat{A}(\hat{B}x) \quad (۳۷)$$

نیز یک تبدیل خطی است. بنابراین  $End(V)$  نه تنها یک فضای برداری است بلکه یک جبر است به این معنا که یک فضای برداری است که در آن یک عمل ضرب شرکت پذیر  $(\hat{A}\hat{B})\hat{C} = \hat{A}(\hat{B}\hat{C})$  تعریف شده است. این جبر جابجایی نیست ( $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$ ) اما یکه دار یا یونیتال ( $Unital$ ) است به این معنا که در آن عنصریکه وجود دارد (در اینجا عملگر همانی) با خاصیت زیر  $\hat{A}\hat{I} = \hat{I}\hat{A} = \hat{A}$  است. دیدیم که به یک عملگر خطی می توان یک ماتریس نسبت داد. وقتی که پایه فضا را معین می کنیم بین فضای تبدیلات خطی یعنی  $End(V)$  و فضای ماتریس های  $M_{n \times n}(C)$  یک یکسانی بوجود می آید. بنابراین می توان از یک تبدیل خطی و یا ماتریس آن بسته به راحتی سخن گفت. می توان با تعریف زیر، فضای تبدیلات خطی روی  $V$  را به یک فضای ضرب داخلی تبدیل کرد:

$$\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle = tr(\hat{A}\hat{B}^\dagger) \quad (۳۸)$$

خواننده می تواند نشان دهد که این تعریف مستقل از پایه ای است که برای فضای برداری در نظر می گیریم.

### مثال هایی از تبدیلات خطی:

الف - در  $F^n$ ، هر تبدیل به صورت  $x \rightarrow x' = Ax$  که در آن  $A \in M_{n \times n}(F)$ .

ب - در  $M_{m \times n}(F)$ ، هر تبدیلی که  $x \in M_{m \times n}(F)$  را به صورت زیر تبدیل می کند

$$x \rightarrow x' = Ax B^T, \quad (۳۹)$$

که در آن  $A \in M_{m,m}(F)$  و  $B \in M_{n,n}(F)$ . می توان ثابت کرد که کلی ترین تبدیل خطی روی چنین فضایی عبارت است از جمعی از تبدیلات فوق به ترتیب زیر:

$$x \longrightarrow x' := \sum_i A_i x B_i. \quad (40)$$

ج - در  $C^k[a, b]$ . بالهام از مثال یک می توانیم بگوییم که کلی ترین تبدیل خطی روی چنین فضایی، تبدیلی است که  $f \in C^k(a, b)$  را به صورت زیرتبدیل می کند:

$$f(x) \longrightarrow f'(x) := \int_a^b K(x, y) f(y) \quad (41)$$

که در آن  $K(x, y)$  تابعی است که نسبت به هردو مختصه خود  $k$  بار مشتق پذیر است. این تبدیل را یک تبدیل انتگرال و  $K(x, y)$  را هسته آن می خوانند. در بعضی از موارد می توان تبدیل خطی را به صورت یک عملگر دیفرانسیل نیز نوشت: به عنوان مثال در فضای  $C^\infty[a, b]$  یعنی فضای توابع بی نهایت مشتق پذیر تبدیلات از نوع

$$f(x) \longrightarrow \frac{d^r}{dx^r} f(x) \quad \text{یا} \quad f(x) \longrightarrow x^r f(x) \quad (42)$$

و هر ترکیب خطی از آنها یک عملگر خطی است مثل تبدیل زیر:

$$f(x) \longrightarrow \left(x^2 \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} + 1\right) f(x). \quad (43)$$

## ۴ جمع نیمه مستقیم دو زیرفضا

**تعریف:** هرگاه  $V$  یک فضای برداری و  $U$  و  $W$  دوزیرفضای آن باشند آنگاه  $U + W$  را به عنوان مجموعه زیرتعریف می کنیم:

$$U + W := \{u|v = u + w, \quad u \in U, \quad w \in W\}. \quad (44)$$

براحتی معلوم می شود که  $U + W$  یک زیرفضای  $V$  است.

مثال: قرار می دهیم  $V = R^3$  (تمام فضای ۳ بعدی) و  $U = \{(x, y, 0)\}$  و  $W = \{(0, y, z)\}$  به ترتیب صفحه  $xy$  و  $yz$  هستند.

**تعریف:** فرض کنید که  $V$  یک فضای برداری و  $U$  و  $W$  دو زیرفضای آن باشند به قسمی که

$$V = U + W \quad \text{الف:}$$

ب: تنها بردار مشترک بین  $U$  و  $W$  بردار صفر باشد.

در این صورت  $V$  جمع نیمه مستقیم  $U$  و  $W$  (*Semi-direct Sum*) می گوئیم و می نویسیم

$$V = U \oplus W. \quad (45)$$

هرگاه خواننده در مثال قبلی شکل زیرفضاهای  $U$  و  $W$  را رسم کند خواهد دید که  $V$  جمع مستقیم  $U$  و  $W$  نیست.

**قضیه:**  $V = U \oplus W$  اگر و فقط اگر هر بردار  $v \in V$  را بتوان به شکل یکتایی به صورت  $u + w$  نوشت که در آن  $u \in U$  و  $w \in W$ .

اثبات جهت اول: داریم  $V = U \oplus W$ . حال فرض کنید که  $v$  را به دو صورت زیر تجزیه کرده ایم

$$v = u + w, \quad v = u' + w'. \quad (46)$$

نتیجه می گیریم که

$$u - u' = w' - w. \quad (47)$$

از آنجا که بنابر فرض، تنها بردار مشترک بین  $U$  و  $W$  صفر است نتیجه می گیریم  $u - u' = 0$  و  $w' - w = 0$ . بنابراین نتیجه می گیریم که تجزیه  $v$  بر حسب  $u$  و  $w$  یکتاست.

اثبات جهت دوم: فرض می کنیم که تجزیه  $v$  یکتاست. حال باید نشان دهیم که تنها برداری که بین  $U$  و  $W$  مشترک است همان بردار صفر است. بردار  $x$  را برداری می گیریم که بین  $U$  و  $W$  مشترک است. این بردار را می توان به دو صورت زیر نوشت:

$$x = (0 \in V) + (x \in W), \quad \text{و} \quad x = (x \in V) + (0 \in W). \quad (48)$$

چون بنابر فرض تجزیه هر برداری یکتاست نتیجه می گیریم که  $x = 0 \in V$  و  $x = 0 \in W$ . بنابراین تنها بردار مشترک بین  $U$  و  $W$  صفر است.

**قضیه:** اگر  $V = U \oplus W$ ، آنگاه  $\dim V = \dim U + \dim W$ .

**اثبات:** پایه  $\{e_1, \dots, e_m\}$  را برای  $U$  و پایه  $\{e_{m+1}, \dots, e_{m+n}\}$  را برای  $W$  در نظر می گیریم. از آنجا که هر بردار  $v \in V$  را می توان به طور یکتا به صورت  $v = u + w$  تجزیه کرد خواهیم داشت

$$v = u + w = \sum_{i=1}^m u_i e_i + \sum_{j=m+1}^{m+n} w_j e_j. \quad (49)$$

بنابراین  $\{e_1, e_2, \dots, e_{m+n}\}$  یک پایه برای  $V$  تشکیل می دهد و در نتیجه  $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$ .

**تعریف:** فرض کنید که  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_r$ . در این صورت هر بردار  $v \in V$  به صورت یکتای  $v = v_1 + v_2 + \dots + v_r$  تجزیه می شود.  $P_j$  را عملگری تعریف کنید که کارزیرا انجام می دهد:

$$P_j v = v_j. \quad (50)$$

در این صورت  $P_j$  را عملگر تصویر روی زیرفضای  $V_j$  می خوانیم.

**قضیه:** عملگرهای تصویر خاصیت های زیر را دارند:

$$\begin{aligned} P_j P_k &= \delta_{jk} P_j \\ \sum_{j=1}^r P_j &= I \end{aligned} \quad (51)$$

اثبات خاصیت اول ساده است. برای تساوی دوم قرار می دهیم

$$v = \sum_{j=1}^r v_j = \sum_{j=1}^r P_j v \quad (52)$$

چون این رابطه برای هر بردار  $v$  صحیح است، خاصیت دوم را نتیجه می گیریم.

**قضیه:** هرگاه  $V$  یک فضای ضرب داخلی باشد و  $V = \bigoplus_{j=1}^r V_j$  که در آن  $V_j$  ها برهم عمود هستند، آنگاه عملگرهای  $P_j$  هرمیتی هستند.

**اثبات:** به ازای هر دو بردار  $v$  و  $w$  داریم

$$\langle v, P_j w \rangle = \langle v, w_j \rangle \quad (53)$$

اما به خاطر عمود بودن زیرفضاها برهم طرف راست برابر است با  $\langle v_j, w_j \rangle$  و یا  $\langle P_j v, w_j \rangle$  و یا  $\langle P_j v, w \rangle$ . بنابراین  $P_j$  هرمیتی است.

## ۵ مسئله ویژه مقدار

عمگنر  $\hat{T} : V \rightarrow V$  را درنظری گیریم. مسئله ویژه مقدار عبارت است از یافتن بردارهای غیرصفری است که تحت اثر  $\hat{T}$  به مضربی از خود تبدیل شوند، یعنی

$$Tx = \lambda x \quad (54)$$

بردار  $x$  غیر صفر خواهد بود هرگاه ماتریس  $T - \lambda I$  وارون پذیر نباشد یعنی اینکه

$$\det(T - \lambda I) = 0. \quad (55)$$

این معادله یک معادله درجه  $N$  است که درحوزه اعداد مختلط حتماً  $N$  تا جواب دارد که آنها را با  $\{\lambda_i, i = 1, \dots, N\}$  نشان می دهیم و آن هارا ویژه مقدارهای تبدیل  $\hat{T}$  می گوئیم. این جواب ها لزوماً همه باهم متفاوت نیستند. بردارمربوط به  $\lambda_i$  را که در معادله  $Tv_i = \lambda_i v_i$  صدق می کند ویژه بردارمربوط به آن ویژه مقدار می گوئیم. هرگاه که یک ویژه مقدار مثل  $\lambda_i, g_i$  بار تکرار شود گوئیم درجه واگنی آن  $g_i$  است. هرگاه  $x$  و  $y$  ویژه بردارمربوط به  $\lambda$  باشند بدیهی است که هر ترکیب خطی آنها نیز ویژه بردار مربوط به  $\lambda$  است. بنابراین مجموعه بردارهای متعلق به یک ویژه مقدار تشکیل یک زیرفضای دهند که آن را ویژه فضای مربوط به آن ویژه مقدار می گویند.

## ۶ عملگرهای هرمیتی، یکانی و بهنجار

**تعریف:** در یک فضای ضرب داخلی، الحاقی یا *Adjoint* یک عملگر  $T$  عملگری مثل  $\hat{T}^\dagger$  است که در شرط زیر صدق کند:

$$\langle v, \hat{T}w \rangle = \langle \hat{T}^\dagger v, w \rangle \quad \forall v, w \in V. \quad (56)$$

با استفاده از این تعریف می توان براحتی خواص زیر را ثابت کرد:

الف : الحاقی یک عملگر خطی خود یک عملگر خطی است.

ب :

$$\begin{aligned} (cA + B)^\dagger &= c^* A^\dagger + B^\dagger & \forall c \in C, \text{ و } A, B \\ (AB)^\dagger &= B^\dagger A^\dagger \\ (A^\dagger)^\dagger &= A. \end{aligned} \quad (57)$$

**عملگر هرمیتی:** در یک فضای ضرب داخلی عملگر هرمیتی به عملگری گفته می شود که در شرط  $\hat{T}^\dagger = \hat{T}$  صدق کند.

عملگر پاد هرمیتی به عملگری گفته می شود که در شرط  $\hat{T}^\dagger = -\hat{T}$  صدق کند.

**مثال:** در فضای  $C^\infty[a, b]$  عملگر  $D := \frac{\partial}{\partial x}$  را در نظر می گیریم. این عملگر در زیر فضایی که از توابع تناوبی تشکیل می شود (با شرط  $f(a) = f(b)$ ) پاد هرمیتی است. در نتیجه عملگر  $P := -iD$  در این زیر فضا هرمیتی خواهد بود.

**عملگر یکانی:** در یک فضای ضرب داخلی، عملگری یکانی  $U$  به عملگری گفته می شود که ضرب داخلی بردارها را حفظ کند، یعنی

$$\langle \hat{U}v, \hat{U}w \rangle = \langle v, w \rangle. \quad (58)$$

چنین عملگری در شرط  $UU^\dagger = U^\dagger U = I$  صدق می کند.

قضیه: عملگری  $U$  یکانی است اگر و فقط اگر اندازه همه بردارها را حفظ کند.

اثبات: اگر  $U$  یکانی باشد با استفاده از 58 معلوم می شود که اندازه بردارها را حفظ می کند. حال فرض کنید که  $U$  اندازه همه بردارها را حفظ

کند. به ازای هر دو بردار دلخواه  $x, y$  می دانیم که

$$\|Ux\| = \|x\|, \quad \|Uy\| = \|y\|, \quad \|U(x+y)\| = \|x+y\|, \quad \|U(x+iy)\| = \|x+iy\|. \quad (59)$$

ازاین روابط نتیجه می گیریم که  $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$ .

خواننده می تواند ثابت کند که ماتریس مربوط به یک عملگر هرمیتی یا یکانی، ماتریس هرمیتی یا یکانی است.

**عملگر بهنجار نرمال:** عملگر نرمال عملگری است که بالحاقی خود جابجا شود. طبیعی است که یک عملگر هرمیتی و یکانی نرمال است.

**قضیه:** عملگر  $A$  بهنجار است اگر و فقط اگر به ازای هر بردار  $x$  داشته باشیم

$$\|Ax\| = \|A^\dagger x\|. \quad (60)$$

**اثبات:** اثبات جهت اول: اگر  $A$  بهنجار باشد داریم  $AA^\dagger = A^\dagger A$ . بنابراین

$$\langle Ax, Ax \rangle = \langle A^\dagger Ax, x \rangle = \langle AA^\dagger x, x \rangle = \langle A^\dagger x, A^\dagger x \rangle. \quad (61)$$

اثبات جهت دوم: از تساوی (60) برای  $x, y, x+y$  و  $x+iy$  که در آن  $x$  و  $y$  دو بردار دلخواه هستند نتیجه می گیریم

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle A^\dagger x, A^\dagger y \rangle, \quad \forall x, y. \quad (62)$$

در نتیجه

$$\langle A^\dagger Ax, y \rangle = \langle AA^\dagger x, y \rangle, \quad (63)$$

و یا

$$\langle (A^\dagger A - AA^\dagger)x, y \rangle = 0. \quad (64)$$

چون  $x$  و  $y$  دلخواه هستند نتیجه می گیریم که  $A^\dagger A = AA^\dagger$  و بنابراین  $A$  یک عملگر بهنجار است.

**قضیه:** فرض کنید که  $A$  یک عملگر بهنجار است. در این صورت اگر  $Ax = \lambda x$  آنگاه  $A^\dagger x = \lambda^* x$ .

**اثبات:** اگر  $A$  بهنجار باشد آنگاه  $A - \lambda I$  نیز بهنجار است. حال از قضیه قبل استفاده می کنیم:

$$\|(A - \lambda I)x\| = 0 \longrightarrow \|(A - \lambda I)^\dagger x\| = 0 \longrightarrow \|(A^\dagger - \lambda^* I)x\| = 0 \longrightarrow A^\dagger x = \lambda^* x. \quad (۶۵)$$

از این قضیه دو نتیجه ساده بدست می آید:

**نتیجه اول:** ویژه مقادیر یک عملگر هرمیتی حقیقی هستند.

**نتیجه دوم:** ویژه مقادیر یک عملگر یکانی فازخالص هستند.

**قضیه:** ویژه بردارهای یک عملگر نرمال که متناظراً ویژه مقادیرهای متمایز هستند برهم عمودند.

**اثبات:** فرض کنیم  $Ax = \lambda x$  و  $Ay = \mu y$ . در این صورت

$$\langle x, \mu y \rangle = \langle x, Ay \rangle = \langle A^\dagger x, y \rangle = \langle \lambda^* x, y \rangle, \quad (۶۶)$$

و از آنجا

$$\longrightarrow (\mu - \lambda) \langle x, y \rangle = 0 \longrightarrow \langle x, y \rangle = 0. \quad (۶۷)$$

## ۷ تجزیه طیفی

**قضیه:** در یک فضای محدود بعد ویژه بردارهای یک عملگر بهنجار یک پایه برای فضا تشکیل می دهند.

با انتخاب یک پایه برای فضای توان اثبات خیلی ساده تری نسبت به آنچه که در کلاس گفته شد از این قضیه بدست داد. عملگر نرمال  $A$  روی

فضای  $V$  را در نظر می گیریم. می دانیم که هر عملگر حتماً یک ویژه مقدار و یک ویژه بردار دارد. این ویژه مقدار و ویژه بردار مربوطه را با  $\lambda_1$  و  $e_1$

نشان می دهیم:

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1. \quad (۶۸)$$

پایه ای برای فضا انتخاب می کنیم که  $e_1$  اولین عضو آن باشد. در این صورت ماتریس عملگر  $A$  به شکل زیردرمی آید:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{n-1} \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix} \quad (69)$$

که در آن  $A_{n-1}$  یک ماتریس  $n-1$  بعدی و  $b_{n-1}$  یک بردار سطری  $n-1$  بعدی است. اما از قضیه های قبل می دانیم که اگر  $Ae_1 = \lambda_1 e_1$  آنگاه  $A^\dagger e_1 = \lambda_1^* e_1$ . در این جا از بهنجاری بودن عملگر  $A$  استفاده کرده ایم. بنابراین ماتریس  $A^\dagger$  نیز می بایست به فرم بالامثلثی باشد و در نتیجه می بایست  $b_{n-1} = 0$ . پس  $A$  به شکل بلوکه قطری زیر درمی آید:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (70)$$

حال  $A_{n-1}$  به نوبه خود یک عملگر نرمال است و حداقل یک ویژه مقدارویک ویژه بردار دارد. همین استدلال را در مورد آن تکرار می کنیم و می بینیم که در پایه ای که اولین و دومین عنصر آن  $e_1$  و  $e_2$  هستند ماتریس عملگر  $A$  به شکل زیردرمی آید:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_{n-2} \end{pmatrix}. \quad (71)$$

با تکرار این عمل می بینیم که در پایه ویژه بردارهای  $A$  یعنی پایه  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ،  $A$  به طور کامل قطری می شود.

این موضوع برای عملگرهای ماتریس های نابهنجار صادق نیست. به عنوان مثال، ماتریس زیر را در نظر می گیریم

$$B = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c \neq 0. \quad (72)$$

ویژه مقدارهای این ماتریس هردو برابر یک هستند. اما تنها یک ویژه بردار برای این ماتریس وجود دارد که به شکل  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  است. بنابراین ویژه بردارهای این ماتریس نمی توانند یک پایه برای فضا تشکیل دهند.

## ۱.۷ قطری کردن

دیدیم که یک عملگر نرمال در پایه ویژه بردارهای خود قطری است. این امر به این معناست که یک تبدیل یکانی وجود دارد که ماتریس عملگر  $A$  را قطری می کند. برای پیدا کردن فرم صریح این تبدیل یکانی به ترتیب زیر عمل می کنیم. ویژه مقادیر و ویژه بردارهای  $A$  را پیدا می کنیم:

$$Ae_i = \lambda_i e_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (۷۳)$$

می دانیم که ویژه بردارهای متناظر با ویژه مقادیر متمایز برهم عمود هستند. ویژه بردارهای مربوط به یک ویژه مقدارواگن را نیز با روش گرام اشمیت برهم عمود می کنیم. در نتیجه این ویژه بردارها در شرایط  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$  صدق می کنند. اگر  $e_i$  ها را به صورت بردارهای ستونی در نظر بگیریم،  $e_i^\dagger$  ها به صورت بردارهای سطری در خواهند آمد و رابطه بهنجار بودن آنها به شکل زیر بیان می شود  $e_i^\dagger e_j = \delta_{ij}$ . حال ماتریس  $S$  را به شکل زیر می نویسیم:

$$S = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix} \quad (۷۴)$$

که در آن  $e_i$  ها به عنوان بردارهای ستونی در  $S$  قرار گرفته اند. در نتیجه خواهیم داشت

$$S^\dagger = \begin{pmatrix} e_1^\dagger \\ e_2^\dagger \\ \vdots \\ e_N^\dagger \end{pmatrix}. \quad (۷۵)$$

بدلیل شرط  $e_i^\dagger e_j = \delta_{ij}$  نتیجه می گیریم که

$$S^\dagger S = \begin{pmatrix} e_1^\dagger \\ e_2^\dagger \\ \vdots \\ e_N^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix} = I, \quad (۷۶)$$

یعنی  $S$  یکانی است.

از آنجا که  $Ae_i = \lambda_i e_i$  بدست می آوریم

$$AS = A \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 e_1 & \lambda_2 e_2 & \cdots & \lambda_n e_n \end{pmatrix} \quad (77)$$

و در نتیجه

$$S^\dagger AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (78)$$

بنابراین  $A$  بایک تبدیل یکانی قطری شده است.

**قضیه:** دو عملگر نرمال  $A$  و  $B$  بایکدیگر جابجایی شوند اگر و فقط اگر بتوان برای آنها یک مجموعه کامل از ویژه بردارهای مشترک یافت. این قضیه را به شکل دیگری نیز می توان بیان کرد و آن اینکه اگر دو عملگر نرمال بایکدیگر جابجاشوند حتماً می توان پایه ای یافت که در آن هر دو عملگر قطری باشند. باید تاکید کنیم که این خاصیت برای هریاه دلخواهی برقرار نیست و قضیه تنهایی گوید که می توان پایه ای یافت که در آن این خاصیت برقرار باشد.

این قضیه هم از نظر مفهومی و هم از نظر کاربردی اهمیت زیادی در مکانیک کوانتومی دارد و خواننده می بایست به دقت اثبات آنرا فرا بگیرد. اثبات: فرض کنیم که  $A$  و  $B$  دو عملگر باشند که یک مجموعه ویژه بردار مشترک مثل  $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$  داشته باشند. از آنجا که این دو عملگر هرمیتی هستند این مجموعه را می توان به عنوان پایه فضانتخاب کرد. در این پایه داریم

$$Ae_i = \lambda_i e_i, \quad Be_i = \mu_i e_i \quad (79)$$

که از آن نتیجه می گیریم

$$ABe_i = BAe_i \longrightarrow AB = BA \longrightarrow [A, B] = 0. \quad (80)$$

برعکس فرض کنیم که  $[A, B] = 0$ .

ویژه بردارهای عملگر  $A$  را پیدا می کنیم. واگنی ویژه مقدار  $\lambda_i$  را  $g_i$  می نامیم. درپایه ویژه بردارهایش،  $A$  شکل زیرپیدامی کند.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{g_1 \times g_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k I_{g_k \times g_k} \end{pmatrix} \quad (۸۱)$$

حال به ترتیب زیرعمل می کنیم: به ازای هر  $e_i$

$$A(Be_i) = B(Ae_i) = B(\lambda_i e_i) = \lambda_i(Be_i), \quad (۸۲)$$

که درآن از جابجاشدن  $A$  و  $B$  استفاده کرده ایم. رابطه فوق نشان می دهد که بردار  $Be_i$  نیز یک ویژه بردار عملگر  $A$  با ویژه مقدار  $\lambda_i$  است. بنابراین  $Be_i$  نیز برحسب بردارهای پایه ویژه فضای  $\lambda_i$  قابل بسط است. این امر به این معناست که دراین پایه (همان پایه ای که  $A$  درآن قطری است) عملگر  $B$  به شکل زیر است:

$$B = \begin{pmatrix} B_{1g_1 \times g_1} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{kg_k \times g_k} \end{pmatrix}. \quad (۸۳)$$

به عبارت دیگر درپایه فوق عملگر  $A$  قطری و عملگر  $B$  بلوکه قطری شده است. حال می توان با تبدیل

$$S = \begin{pmatrix} S_{1g_1 \times g_1} & & \\ & \ddots & \\ & & S_{kg_k \times g_k} \end{pmatrix}. \quad (۸۴)$$

که در آن  $S_i$  قطری کننده ماتریس  $B_i$  است کل ماتریس  $B$  را قطری کرد. این تبدیل قطری بودن  $A$  را دست نمی زند زیرا  $S_i I_i S_i^\dagger = I_i$ . پایه جدید پایه ای است که در آن هر دو عملگر قطری هستند.

## ۸ نمادگذاری دیراک

یک فضای برداری  $N$  بعدی با پایه بهنجار  $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$  در نظر می گیریم. هر بردار  $v \in V$  بسطی از بردارهای پایه به شکل زیر است:

$$v = \sum_{i=1}^N v_i e_i \quad (۸۵)$$

ضرب داخلی این بردار در خودش به صورت زیر نوشته می شود:

$$\langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^N v_i^* v_i. \quad (۸۶)$$

می توان به ازای هرچنین برداری یک بردار سطر  $\langle v|$  و یک بردار ستونی  $|v\rangle$  به شکل زیر تعریف کرد:

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} \quad (۸۷)$$

و

$$\langle v| = \begin{pmatrix} v_1^* & v_2^* & \dots & v_N^* \end{pmatrix}. \quad (۸۸)$$

بردار  $|v\rangle$  را یک بردار  $ket$  و بردار  $\langle v|$  را یک بردار  $Bra$  نام می نهم. حال به این نکته توجه می کنیم که این دو بردار را می توانیم در یکدیگر ضرب کنیم:

$$\langle v|v\rangle = \sum_{i=1}^N v_i^* v_i = \langle v, v \rangle. \quad (۸۹)$$

طرف راست یک ضرب داخلی است ولی طرف چپ ضرب دو ماتریس است. خوبی نمادگذاری دیراک آن است که انواع عملیاتی را که مایم خواهیم روی بردارها انجام دهیم به عملیاتی از نوع ضرب ماتریس هاتقلیل می دهد.

بردارهای پایه  $e_1, \dots, e_N$  نیز نمایش کت و برای زیر را پیدایمی کنند:

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad |N\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (90)$$

$$\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \langle 2| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \langle N| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (91)$$

بنابراین داریم :

$$|v\rangle := \sum_{i=1}^n v_i |i\rangle. \quad (92)$$

$$\langle v| := \sum_{i=1}^n v_i^* \langle i|. \quad (93)$$

ازاین به بعد تمام بردارها را به صورت کت و برا نمایش می دهیم و از نوشتن بردارها به صورت  $v = \sum_{i=1}^n e_i$  صرف نظرمی کنیم. می توان یک بردار برا مثل  $|v\rangle$  و یک بردار کت مثل  $\langle w|$  را به صورت درهم ضرب کرد و یک عدد بدست آورد که به آن براکت می گوییم

$$\langle v|w\rangle := \sum_{i=1}^n v_i^* w_i, \quad (94)$$

که درواقع همان ضرب داخلی بین دوبردار  $w$  و  $v$  است. این براکت دارای خاصیت های زیراست:

$$\langle v|w + w'\rangle = \langle v|w\rangle + \langle v|w'\rangle$$

$$\begin{aligned}
\langle v|cw\rangle &= c\langle v|w\rangle \\
\langle cv|w\rangle &= c^*\langle v|w\rangle \\
\langle v|v\rangle &\geq 0 \\
\langle v|v\rangle &= 0 \longrightarrow |v\rangle = \langle v| = 0
\end{aligned} \tag{۹۵}$$

براحتی می توان دید که:

$$|v\rangle = \sum_{i=1}^N v_i|i\rangle, \langle i|v\rangle = v_i. \tag{۹۶}$$

می توان یک بردار کت مثل  $|v\rangle$  و یک بردار برا مثل  $\langle w|$  را به صورت درهم ضرب کرد و یک ماتریس بدست آورد:

$$|v\rangle\langle w| := \begin{pmatrix} v_1w_1^* & v_1w_2^* & v_1w_3^* & \cdot & v_1w_n^* \\ v_2w_1^* & v_2w_2^* & v_2w_3^* & \cdot & v_2w_n^* \\ v_3w_1^* & v_3w_2^* & v_3w_3^* & \cdot & v_3w_n^* \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_nw_1^* & v_nw_2^* & v_nw_3^* & \cdot & v_nw_n^* \end{pmatrix} \tag{۹۷}$$

واضح است که :

$$\begin{aligned}
|v\rangle\langle w+w'| &= |v\rangle\langle w| + |v\rangle\langle w'| \\
|v\rangle\langle cw| &= c^*|v\rangle\langle w| \\
|cv\rangle\langle w| &= c|v\rangle\langle w|.
\end{aligned} \tag{۹۸}$$

مهمترین روابطی که درمورد بردارهای کت و برا می بایست به یادداشته باشیم و دائماً از آنها استفاده کنیم روابط زیراست:

$$\begin{aligned}
\langle i|j\rangle &= \delta_{ij} \\
\sum_i |i\rangle\langle i| &= I
\end{aligned} \tag{۹۹}$$

نمایش دیراک این حسن بسیارمهم را دارد که بسیاری از روابط دیگر نظیر آنچه را که دربخش های پیشین دیدیم به استفاده ساده ای از این دورابطه

تقلیل پیدا می کنند. به عنوان مثال می توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} |v\rangle &= I|v\rangle = \sum_{i=1}^N |i\rangle\langle i|v\rangle = \sum_{i=1}^N v_i|i\rangle, \\ T &= \sum_j |j\rangle\langle j|T \sum_i |i\rangle\langle i| = \sum_{i,j} T_{ji}|j\rangle\langle i|, \\ \langle i|AB|j\rangle &= \sum_k \langle i|A|k\rangle\langle k|B|j\rangle \end{aligned} \quad (100)$$

رابطه اول بسط یک بردار برحسب بردارهای پایه را بیان می کند، رابطه دوم بسط یک عملگر را برحسب عملگرهای پایه  $|i\rangle\langle j|$  بیان می کند و بالاخره رابطه آخر درواقع بیان می کند که ماتریس حاصلضرب دو تبدیل خطی برابر است با حاصل ضرب ماتریس های آن دو تبدیل خطی.

هرگاه پایه فضای برداری را عوض کنیم مولفه های یک بردار عوض می شوند. نحوه عوض شدن به ترتیب زیر است:

$$v'_i := \langle i'|v\rangle = \sum_{j=1}^n \langle i'|j\rangle\langle j|v\rangle \longrightarrow v'_i = \sum_{j=1}^n S_{ij}v_j \quad (101)$$

یا به صورت ماتریسی :

$$v' := Sv \quad (102)$$

که در آن ماتریس مربعی  $S$  با درایه های  $\langle i'|j\rangle := S_{ij}$  ماتریس تبدیل پایه است.

هم چنین تحت تغییر پایه درایه های یک تبدیل خطی نیز عوض می شوند. به شکل زیر:

$$\langle i'|T|j'\rangle = \sum_{i,j} \langle i'|i\rangle\langle i|T|j\rangle\langle j|j'\rangle \longrightarrow T' := STS^{-1}. \quad (103)$$

## ۱۰.۸ نگاشت بین فضای کت ها و فضای براها

بین فضای کت ها و فضای براها می توان نگاشتی به شکل زیرتعریف کرد:

$${}^\dagger : |v\rangle \longrightarrow \langle v|, \quad {}^\dagger : \langle v| \longrightarrow |v\rangle. \quad (104)$$

براحتی دیده می شود که این نگاشت که نگاشت الحاقی نامیده می شود خواص زیر را دارد:

$$\begin{aligned} |cv\rangle^\dagger &= c^* \langle v| \\ |v+w\rangle^\dagger &= \langle v+w| \\ (|v\rangle^\dagger)^\dagger &= |v\rangle \end{aligned} \quad (105)$$

با توجه به اینکه عملگر الحاقی هم روی کت ها و هم روی برا ها اثر می کند می توان آن را روی تبدیل های خطی نیز اعمال کرد به این معنا که:

$$\dagger(A) = \dagger \left( \sum_{i,j} A_{ij} |i\rangle \langle j| \right) = \sum_{i,j} A_{ij}^* |j\rangle \langle i| \quad (106)$$

درنتیجه هرگاه به عملگرها به شکل ماتریس نگاه کنیم خواهیم داشت :

$$A^\dagger = (A^*)^T \quad (107)$$

که در آن نماد  $T$  به معنای ترانپوز ماتریس است.

با استفاده از این تعریف می توان براحتی نشان داد که :

$$|w\rangle = T|v\rangle \longrightarrow \langle w| = \langle v|T^\dagger \quad (108)$$

و با استفاده از رابطه اخیر می توان صحت روابط زیر را در مورد عملگرها و الحاقی آنها تحقیق کرد:

$$\begin{aligned} (AB)^\dagger &= B^\dagger A^\dagger, \\ (cA)^\dagger &= c^* A^\dagger, \\ ((A)^\dagger)^\dagger &= A \\ (A+B)^\dagger &= A^\dagger + B^\dagger. \end{aligned} \quad (109)$$

### عملگرهای تصویرگر:

فضای برداری  $V$  و یک زیرفضای آن مثل  $W$  در نظر می گیریم. برای  $W$  یک پایه مثل  $\{|i\rangle, i = 1, \dots, m\}$  در نظر می گیریم. در این صورت

عملگر

$$P_W := \sum_{i=1}^m |i\rangle\langle i| \quad (110)$$

عملگر تصویر روی  $V$  خوانده می شود. این عملگر بردارهای فضا را بروی  $W$  تصویر می کند. این عملگر هرمیتی است و در شرط  $P^2 = P$  صدق می کند.

**عملگر مثبت:** عملگر  $T$  را مثبت می گوئیم هرگاه

$$\langle v|T|v\rangle \geq 0 \quad \forall v. \quad (111)$$

واضح است که یک عملگر مثبت حتماً دارای ویژه مقادیر بزرگتر یا مساوی با صفر است. هرگاه چنین عملگری بهنجار باشد دارای یک تجزیه طیفی است. یعنی:

$$T = \sum_i \lambda_i P_i, \quad (112)$$

در این صورت می توان جذراین عملگر را به صورت زیر تعریف کرد:

$$T^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^k \lambda_i^{\frac{1}{2}} P_i. \quad (113)$$

**توابع عملگرهای نرمال:**

در مکانیک کوانتومی اغلب نیاز داریم که توابعی از عملگرهای هرمیتی را تعریف کنیم. فرض کنید که  $T$  یک عملگر دلخواه و  $f: C \rightarrow C$  تابعی بابت زیر باشد:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \quad (114)$$

در این صورت تابع  $f(T)$  نیز با همین بسط تعریف می شود.

$$f(T) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n T^n. \quad (115)$$

قضیه: اگر  $T$  یک عملگر بهنجار باشد تابع  $f(T)$  همواره یک چند جمله ای خواهد بود.

اثبات: چون  $T$  بهنجار است داریم

$$T = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i, \quad (116)$$

و از آنجا

$$T^n = \sum_{i=1}^k \lambda_i^n P_i \quad (117)$$

حال می توانیم عملگرهای تصویرگر  $P_i$  را بر حسب  $T$  و توان های آن بنویسیم. فرض کنید که  $P_j = g_j(T)$ . در این صورت خواهیم داشت

$$P_j := g_j(T) = g_j\left(\sum_i \lambda_i P_i\right) = \sum_i g_j(\lambda_i) P_i \quad (118)$$

که از آن نتیجه می گیریم  $g_j(\lambda_i) = \delta_{ij}$ . بنابراین هر تابع  $g_j(x)$  می بایست چنان باشد که به ازای  $x = \lambda_j$  مقدار آن برابر با ۱ و به ازای  $x \neq \lambda_j$  مقدار آن برابر با صفر باشد. چنین تابعی فرم زیر را دارد:

$$g_j(x) = \prod_{k \neq j} \frac{x - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k} \quad (119)$$

در نتیجه

$$P_j \equiv g_j(T) = \prod_{k \neq j} \frac{T - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}. \quad (120)$$

این رابطه نشان می دهد که هر عملگر تصویرگر چیزی نیست جز یک چند جمله ای بر حسب  $T$  و در نتیجه تابع  $f(T)$  نیز چیزی جز یک چند جمله ای بر حسب  $T$  نخواهد بود.

## ۹ تجزیه قطبی یک عملگر

بین اعداد مختلط و عملگرها تناظر جالبی وجود دارد به این معنا که اگر یک عدد مختلط  $z$  را متناظر با یک ماتریس یا عملگر دلخواه مختلط بگیریم، آنگاه یک عدد حقیقی متناظر با یک عملگر هرمیتی، یک عدد موهومی خالص متناظر با یک عملگر پاد هرمیتی و یک عدد مثبت متناظر

با یک عملگر مثبت است. هم چنین یک عدد مختلط که یک فاز خالص است متناظر با یک عملگر یکانی است. این تناظر را می توان به بیش از این نیز گسترش داد و آن اینکه همچنان که یک عدد مختلط را می توان در مختصات قطبی به شکل  $z = re^{i\theta}$  یک عملگر دلخواه را نیز می توان به صورت قطبی تجزیه<sup>۶</sup> کرد. قضیه زیر این موضوع را بیان می کند: نخست قضیه را برای ماتریس های مربعی بیان می کنیم.

**قضیه: تجزیه قطبی** اگر  $A$  یک عملگر دلخواه مربعی روی یک فضای برداری  $V$  باشد، آنگاه می توان نوشت

$$A = UJ = KU \quad (۱۲۱)$$

که در آن  $J$  و  $K$  عملگر های مثبت و  $U$  یک عملگر یکانی است که در رابطه

$$U^\dagger U = UU^\dagger = I$$

صدق می کند. دقت کنید که بر خلاف اعداد مختلط که برایشان تساوی  $re^{i\theta} = e^{i\theta}r$  برقرار است، در اینجا تساوی  $UJ = JU$  برقرار نیست بلکه قسمت مثبت عملگر بسته به جای  $U$  متفاوت است.

**اثبات:** می دانیم که عملگر  $J := \sqrt{A^\dagger A}$  یک عملگر مثبت و بهنجار است. بنابراین می توان درپایه ای آن را قطری کرد، یعنی

$$J|i\rangle = \lambda_i|i\rangle, \quad \lambda_i \geq 0. \quad (۱۲۲)$$

برای ویژه بردارهایی که ویژه مقدار  $\lambda_i$  مخالف صفر است قرار می دهیم:

$$|e_i\rangle := \frac{A|i\rangle}{\lambda_i}. \quad (۱۲۳)$$

این بردارها یک مجموعه بردار متعامد یکه تشکیل می دهند، زیرا:

$$\langle e_i | e_j \rangle = \frac{1}{\lambda_i \lambda_j} \langle i | A^\dagger A | j \rangle = \frac{1}{\lambda_i \lambda_j} \langle i | J^2 | j \rangle = \delta_{ij}. \quad (۱۲۴)$$

این مجموعه بردارهای  $|e_i\rangle$  را با فرایند گرام-اشمیت تبدیل به یک پایه کامل می کنیم و همگی آنها را نیز با  $|e_i\rangle$  نمایش می دهیم و سپس عملگر زیر را می سازیم:

$$U := \sum_i |e_i\rangle \langle i|. \quad (۱۲۵)$$

---

Polar Decomposition<sup>۶</sup>

این عملگر یک عملگر یکانی است. حال نشان می دهیم که اثر عملگر  $UJ$  و  $A$  روی پایه  $\{|i\rangle\}$  یکسان است. اگر  $\lambda_i = 0$  آنگاه

$$UJ|i\rangle = 0 \quad A|i\rangle = 0. \quad (126)$$

این که چرا  $A|i\rangle = 0$ ، از این ناشی می شود که اندازه این بردار یعنی  $\langle i|A^\dagger A|i\rangle$  برابر با صفر است. اگر هم  $\lambda_i \neq 0$ ، آنگاه

$$UJ|i\rangle = U\lambda_i|i\rangle = \lambda_i|e_i\rangle, \quad A|i\rangle = \lambda_i|e_i\rangle. \quad (127)$$

نبار این دو عملگر باهم مساوی هستند و در نتیجه  $A = UJ$ . می توانیم این عملگر را به صورت زیر نیز بنویسیم:

$$A = UJ = UJU^\dagger U = KU,$$

که در آن  $K$  باز هم یک عملگر مثبت است.

■ **مثال:** ماتریس  $A$  را به صورت  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$  در نظر می گیریم. داریم:

$$J^2 = A^\dagger A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow J = \sqrt{A^\dagger A} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (128)$$

ویژه بردارهای این ماتریس به صورت زیر هستند:

$$|1\rangle_{\lambda=\sqrt{5}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle_{\lambda=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (129)$$

از ویژه بردار متناظر با ویژه مقدار غیر صفر بدست می آوریم:

$$|e_1\rangle \equiv \frac{A|1\rangle}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (130)$$

بردار  $|e_2\rangle$  را باید چنان انتخاب کنیم که بر  $|e_1\rangle$  عمود و در عین حال یکه باشد. این بردار برابر است با:  $|e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

ماتریس یکانی  $U$  برابر است با:

$$U = |e_1\rangle\langle 1| + |e_2\rangle\langle 2| = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}. \quad (۱۳۱)$$

براحتی دیده می شود که

$$UJ = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = A. \quad (۱۳۲)$$

■ **مثال:** ماتریس  $A$  را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$A = a + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma} = a + b\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma},$$

که در  $b$  اندازه بردار  $\mathbf{b}$  و  $\mathbf{n}$

بردار یکه در راستای  $\mathbf{b}$  است. هرگاه بردار حالت اسپین را در راستای مثبت و منفی  $\mathbf{n}$  با  $|n^+\rangle$  و  $|n^-\rangle$  نشان دهیم می دانیم که  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} |n^\pm\rangle = \pm |n^\pm\rangle$ . بنابراین داریم

$$A^\dagger A = (a+b)^2 |n^+\rangle\langle n^+| + (a-b)^2 |n^-\rangle\langle n^-|. \quad (۱۳۳)$$

و در نتیجه

$$J \equiv \sqrt{A^\dagger A} = |a+b| |n^+\rangle\langle n^+| + |a-b| |n^-\rangle\langle n^-|. \quad (۱۳۴)$$

با همان نمادگذاری های توصیف شده در این بخش خواهیم داشت:

$$(۱۳۵)$$

$$|e^+\rangle = \frac{A|n^+\rangle}{|a+b|} = \frac{(a+b)|n^+\rangle}{|a+b|} = \text{sign}(a+b)|n^+\rangle, \quad |e^-\rangle = \frac{A|n^-\rangle}{|a-b|} = \frac{(a-b)|n^-\rangle}{|a-b|} = \text{sign}(a-b)|n^-\rangle.$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$U = \text{sign}(a+b)|n^+\rangle\langle n^+| + \text{sign}(a-b)|n^-\rangle\langle n^-| \quad (۱۳۶)$$

به این ترتیب و با توجه به این که

$$|n^{\pm}\rangle\langle n^{\pm}| = \frac{1}{2}(I \pm \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}),$$

و با کمی محاسبه خواهیم داشت:

$$U = |n^+\rangle\langle n^+| + |n^-\rangle\langle n^-| = I, \quad J = (a+b)|n^+\rangle\langle n^+| + (a-b)|n^-\rangle\langle n^-| = a + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad a > b$$

$$U = |n^+\rangle\langle n^+| - |n^-\rangle\langle n^-| = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad J = (a+b)|n^+\rangle\langle n^+| + (b-a)|n^-\rangle\langle n^-| = b + a\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad a > b$$

■ **تمرین:** محاسبه بالا را با رفتن به پایه ای که در آن  $\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}$  قطری است، می شد خیلی سریع تر به نتیجه رساند. این کار را انجام دهید.

تجزیه قطبی یک ماتریس همواره نیازمند این نوع محاسبات نیست. در موارد ساده همواره می توان با سعی و خطا یا حتی تنها با نگاه کردن به فرم ماتریس ها، تجزیه قطبی آنها را فهمید. مثل ماتریس های زیر که تجزیه قطبی هر کدام از آنها در طرف راست تساوی نوشته شده است:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (137)$$

تا کنون فرض کردیم که ماتریس  $A$  مربعی است. اما تجزیه قطبی را با تغییرات اندکی می توان برای ماتریس های غیرمربعی نیز ثابت کرد. فرض کنید که  $A_{m \times n}$  یک ماتریس  $m \times n$  است که در آن  $m < n$  است. چنانکه در پایان خواهیم دید، این کار از کلیت راه حل نمی کاهد. در این صورت ماتریس  $J^2 = A^\dagger A$  یک ماتریس مربعی مثبت با ابعاد  $n \times n$  است. این ماتریس حداقل دارای  $n - m$  تا ویژه مقدار صفر است. برای فهمیدن دلیل اش به این توجه می کنیم که رابطه ویژه مقداری

$$A|\lambda\rangle = 0$$

شامل  $m$  رابطه برای  $n$  تا پارامتر است و بنابراین حتما دارای  $n - m$  تا جواب مستقل است. بنابراین ماتریس  $A$  دارای  $n - m$  تا ویژه مقدار صفر و  $m$  تا ویژه بردار مستقل متناظر با این ویژه مقدارهاست. حال به رابطه زیر نگاه می کنیم:

$$\langle \lambda | J^2 | \lambda \rangle = 0 \quad \leftrightarrow \quad \langle \lambda | A^\dagger A | \lambda \rangle = 0 \quad \leftrightarrow \quad A|\lambda\rangle = 0 \quad (138)$$

که نشان می دهد ماتریس  $J^2$  نیز دارای  $n - m$  تا ویژه مقدار صفر است. حال با جواب های غیر صفری که احتمالا تعداد آنها از  $m$  ممکن است کمتر هم باشد و با کامل کردن آنها به  $m$  تا بردار متعامد با فرایند گرام اشمیت، عملگر زیر را می سازیم:

$$U = \sum_{i=1}^m |e_i\rangle \langle i| \quad (۱۳۹)$$

دقت کنید که بردارهای  $|i\rangle$  دارای بعد  $1 \times n$  و بردارهای  $|e_i\rangle = \frac{A|i\rangle}{\lambda_i}$  دارای بعد  $1 \times m$  هستند. ماتریس  $U$  یک ماتریس  $m \times n$  بعدی است. این ماتریس دارای شرط زیر است:

$$UU^\dagger = \sum_{i=1}^m |e_i\rangle \langle e_i| = I_m. \quad (۱۴۰)$$

چنین عملگری را یک ایزومتری می خوانیم. دقت کنید که

$$U^\dagger U = \sum_{i=1}^m |i\rangle \langle i| \neq I_n,$$

زیرا عملگر واحد روی فضای  $n$  بعدی به صورت  $\sum_{i=1}^n |i\rangle \langle i|$  است و  $m < n$  است. بقیه استدلال هایی که قبلا در مورد ماتریس های مربعی انجام دادیم در این مورد نیز برقرار است و ثابت می شود که

$$A = UJ \quad \text{or} \quad A_{m \times n} = U_{m \times n} J_{n \times n}$$

. با توجه به این که  $U^\dagger U = I_m$  است، می توانیم بنویسیم

$$A = UJ = UJU^\dagger U = KU \quad \text{or} \quad A_{m \times n} = K_{n \times n} U_{m \times n}. \quad (۱۴۱)$$

دقت کنید که ماتریس های مثبت  $J$  و  $K$  همواره مربعی هستند و ماتریس یکانی است که مستطیلی است. سوالی که پیش می آید این است که برای وقتی که  $m > n$  است چگونه تجزیه قطبی انجام می شود. پاسخ اش این است که در این صورت ماتریس  $A^\dagger$  را تجزیه قطبی می کنیم و سپس نتیجه را ترانهاد می کنیم.

■ مثال: عملگر زیر را در نظر می گیریم:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

بدست می آوریم:

$$J^2 = A^\dagger A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ویژه مقدارها و ویژه بردارهای این عملگر عبارتند از:

$$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 0, \qquad (۱۴۲)$$

عبارتند از:

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (۱۴۳)$$

در نتیجه بدست می آوریم:

$$J = \sqrt{J^2} = \sqrt{3}|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & -3 + \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 4\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ -3 + \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 3 + \sqrt{3} \end{pmatrix}. \qquad (۱۴۴)$$

هم چنین داریم:

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}A|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad |e_2\rangle = A|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (۱۴۵)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$U = |e_1\rangle\langle 1| + |e_2\rangle\langle 2| = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} & 2 & 1 - \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} & 2 & 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix}. \qquad (۱۴۶)$$

حال خواننده می تواند نشان دهد که واقعا

$$A = UJ, \quad UU^\dagger = I_2.$$

که در آن  $I_2$  ماتریس واحد دو بعدی است. اما ماتریس  $U^\dagger U$  چیست؟ داریم

$$U^\dagger U = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 \\ 4 & 8 & 4 \\ -4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad (۱۴۷)$$

که به وضوح نشان می دهد این ماتریس، ماتریس واحد نیست. دلیل اش هم روشن است زیرا

$$U^\dagger U = \sum_{i=1}^2 |i\rangle\langle i| \neq \sum_{i=1}^3 |i\rangle\langle i|.$$

این رابطه دو چیز را به ما یاد می دهد: نخست آنکه عملگر  $U^\dagger U$  اگر چه ماتریس واحد نیست، اما با توجه به این که  $i = 1, 2$ ،  $U|i\rangle = |i\rangle$ ، یک عملگر تصویر روی زیرفضای ویژه بردارهای غیر صفر  $A$  یا  $J^2$  هست، دوم اینکه اگر بردار  $|3\rangle\langle 3|$  را به آن اضافه کنیم، تبدیل به عملگر واحد می شود. در واقع از رابطه (۱۴۳) داریم

$$|3\rangle\langle 3| = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (۱۴۸)$$

که نشان می دهد اگر آن را با ماتریس (۱۴۷) اضافه کنیم، حاصل اش ماتریس واحد روی فضای سه بعدی است. اما یک چیز باقی مانده و آن این است که اگر:  $A = UJ$  است و  $A^\dagger = JU^\dagger$  و  $U^\dagger U$  هم برابر با ماتریس واحد نیست، پس چگونه است که از همان ابتدا کار خود را با تساوی  $A^\dagger A = J^2$  شروع کرده ایم؟ پاسخ اش این است که اگر چه  $U^\dagger U \neq I_3$  است، اما اولاً  $U^\dagger U = \sum_{i=1}^m |i\rangle\langle i|$  با  $J^2$  جابجا می شود و ثانيا در زیرفضایی که  $J^2$  به صورت غیر صفر عمل می کند، این عملگر واقعا برابر با واحد است، یا به عبارت بهتر، این عملگر در کل فضای  $n$  بعدی به صورت یک عملگر تصویرگر روی زیرفضای پایه  $J^2$  عمل می کند.

## ۱۰ تجزیه مقدار منفرد

تاکنون دیدیم که عملگرهای بهنجار را می توان قطری کرد. قضیه زیر تعمیمی است که نشان می دهد قطری کردن یک ماتریس یا عملگر دلخواه که نه بهنجار و نه حتی مربعی است، چگونه انجام می شود. این کار تجزیه مقدار منفرد<sup>۷</sup> نام دارد.

**قضیه: تجزیه مقدار منفرد:** یک ماتریس دلخواه  $A$  را، خواه مربعی باشد یا نباشد، همواره می توان به صورت  $A = UDV$  نوشت که در آن  $D$  یک ماتریس قطری است و  $U$  و  $V$  ایزومتري هستند.

**اثبات:** ماتریس  $A$  را تجزیه قطبی می کنیم و می نویسیم

$$A = UJ. \quad (۱۴۹)$$

از آنجا که  $J$  یک ماتریس مثبت و در نتیجه هرمیتی است می توان آن را قطری کرد و نوشت  $J = V^\dagger DV$  که در آن  $V$  یک ماتریس یکانی است. بنابراین

$$A = UJ = U(V^\dagger DV) = (UV^\dagger)DV = U'DV \quad (۱۵۰)$$

که در آن  $U'$  و  $V$  یکانی هستند. می توانیم برای وضوح بیشتر با نشان دادن ابعاد ماتریس ها این رابطه را به صورت زیر بنویسیم:

$$A_{m \times n} = U_{m \times n} J_{n \times n} = U_{m \times n} V_{n \times n} D_{n \times n} V_{n \times n}^\dagger = U'_{m \times n} D_{n \times n} V_{n \times n}. \quad (۱۵۱)$$

## ۱۱ ضرب تانسوری فضاهاى بردارى

برای سادگی در این درس ضرب تانسوری دو فضای برداری را به طور مجرد و مستقل از پایه تعریف نمی کنیم. برای چنین تعریفی خواننده می تواند به هر کتاب جبر خطی مراجعه کند.

<sup>۷</sup>Singular Value Decomposition

هرگاه  $(A)_{m \times n}$  و  $(B)_{p \times q}$  دو ماتریس با ابعاد داده شده باشند می توان ضرب تانسوری آنها را که ماتریسی با ابعاد  $(mp \times nq)$  است به شکل زیر تعریف کرد:

$$(A \otimes B)_{ij,kl} := A_{ik} B_{jl} \quad (152)$$

به لحاظ عملی ضرب این دو ماتریس به شکل زیر محاسبه می شود:

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \quad (153)$$

این ضرب دارای خواص زیراست که خواننده می تواند با استفاده از تعریف صحت آنها را تحقیق کند:

$$\begin{aligned} A \otimes (B + C) &= A \otimes B + A \otimes C \\ A \otimes (\alpha B) &= (\alpha A) \otimes B = \alpha(A \otimes B) \\ (A \otimes B) \otimes C &= A \otimes (B \otimes C) \\ (A \otimes B)(C \otimes D) &= AC \otimes BD \\ (A \otimes B)^\dagger &= A^\dagger \otimes B^\dagger \end{aligned} \quad (154)$$

حال اگر فضای برداری  $V$  با بردارهای پایه  $\{|i\rangle, i = 1, \dots, n\}$  و فضای برداری  $W$  با بردارهای پایه  $\{|\mu\rangle, \mu = 1 \dots m\}$  را در نظر بگیریم، می توان ضرب تانسوری بردارهای پایه را مطابق با تعریف بالا بدست آوریم. به این ترتیب  $mn$  بردار پایه به شکل  $|i\rangle \otimes |\mu\rangle$  بدست می آوریم که آنها را به اختصار با  $|i, \mu\rangle$  نمایش می دهیم:

$$|i, \mu\rangle := |i\rangle \otimes |\mu\rangle \quad i = 1 \dots m, \mu = 1 \dots n. \quad (155)$$

این بردارهای جدید یک فضای  $mn$  بعدی را جاروب می کنند که آن را ضرب تانسوری فضاهای  $V$  و  $W$  می خوانیم. درحقیقت داریم :

$$V \otimes W := \text{Span}\{|i, \mu\rangle\}. \quad (156)$$

مثال: هرگاه  $V$  یک فضای برداری با پایه

$$\{|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

باشد آنگاه  $V \otimes V$  یک فضای برداری ۴ بعدی با پایه های زیراست:

$$|0,0\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |0,1\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1,0\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1,1\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (157)$$

به ازای هر دو بردار  $|v\rangle$  و  $|w\rangle$  می توان برداری در فضای  $V \otimes W$  به شکل زیر تعریف کرد:

$$|v\rangle \otimes |w\rangle := v_i w_\mu |i, \mu\rangle \quad (158)$$

این بردار را ضرب تانسوری بردارهای  $|v\rangle$  و  $|w\rangle$  می گوئیم. این ضرب به طور بدیهی از همان خواص پیروی می کند که ضرب ماتریسی، یعنی

$$\begin{aligned} |v\rangle \otimes (|w\rangle + |z\rangle) &= |v\rangle \otimes |w\rangle + |v\rangle \otimes |z\rangle \\ |v\rangle \otimes (\alpha|w\rangle) &= (\alpha|v\rangle) \otimes |w\rangle = \alpha(|v\rangle \otimes |w\rangle) \\ (|v\rangle \otimes |w\rangle) \otimes |z\rangle &= |v\rangle \otimes (|w\rangle \otimes |z\rangle) \\ (|v\rangle \otimes |w\rangle)^\dagger &= \langle v| \otimes \langle w|. \end{aligned} \quad (159)$$

یک بردار دلخواه در فضای  $V \otimes W$  را الزاما نمی توان به صورت  $|v\rangle \otimes |w\rangle$  نوشت مثل بردار زیر

$$|\psi\rangle := |0,0\rangle + |1,1\rangle \quad (160)$$

که خواننده خود می تواند این امر را نشان دهد. با این وجود هر حالتی را می توان به صورت مجموعی از ضرب تانسوری بردارهای  $V$  در بردارهای  $W$  نوشت. برای فهم این نکته کافی است دقت کنیم که هر حالت دلخواه در  $V \otimes W$  چنین بسطی دارد:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,\mu} \psi_{i,\mu} |i, \mu\rangle \quad (161)$$

که با تعریف  $|\phi_i\rangle := \sum_{\mu} \psi_{i,\mu} |\mu\rangle$  می توان آن را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$|\psi\rangle = \sum_i |i\rangle \otimes |\phi_i\rangle, \quad (162)$$

و این ادعای فوق را ثابت می کند. هر حالتی را که نتوان به صورت  $|v\rangle \otimes |w\rangle$  نوشت یک حالت درهم تنیده می گوئیم. یکی از مسائل مهم در نظریه اطلاعات کوانتومی و درمکانیک کوانتومی که دامنه آن به ریاضیات خالص نیز کشیده شده است مطالعه این حالت های درهم تنیده است.

هرگاه  $A : V \rightarrow V$  و  $B : W \rightarrow W$  دو عملگر خطی باشند می توان ضرب تانسوری آنها را به شکل زیرروی بردارهای پایه تعریف کرد:

$$(A \otimes B)(|i, \mu\rangle) := (A|i\rangle) \otimes (B|\mu\rangle). \quad (163)$$

برای تعیین عناصر ماتریسی این عملگر به طریق معمول عمل می کنیم:

$$(A \otimes B)_{k\nu, i\mu} := \langle k, \nu | A \otimes B | i, \mu \rangle = \langle k | A | i \rangle \langle \nu | B | \mu \rangle = A_{ki} B_{\nu\mu} \quad (164)$$

که نشان می دهد ماتریس ضرب تانسوری عملگر ها از ضرب تانسوری ماتریس های دو عملگر بدست می آید.

**تمرین:** نشان دهید که هر عملگر  $T : V \otimes W \rightarrow V \otimes W$  را می توان به صورت مجموعی از عملگرهای  $a \otimes b : V \otimes W \rightarrow V \otimes W$  نوشت.

## ۱.۱۱ ردورد جری

فرض کنید که  $T$  عملگری است که روی فضای  $V \otimes W$  تعریف شده است. بنابر تمرینی که در بالا حل کردید می توان این عملگر را به صورت زیر نوشت:

$$T = \sum_i a_i \otimes b_i \quad (165)$$

در این صورت ردّ های جزئی عملگر  $T$  به صورت زیر تعریف می شوند:

$$tr_V(T) := \sum_i tr(a_i)b_i, \quad tr_W(T) := \sum_i tr(b_i)a_i. \quad (۱۶۶)$$

بنابراین  $tr_V(T)$  عملگری است روی فضای  $W$  و  $tr_W(T)$  عملگری است روی فضای  $V$ .

**تمرین:** نشان دهید که

$$[tr_V(T)]_{\mu,\nu} := \sum_i T_{i\mu, i\nu}, \quad [tr_W(T)]_{i,j} := \sum_{\mu} T_{i\mu, j\mu}. \quad (۱۶۷)$$

هم چنین نشان دهید که  $tr(T) = tr_V(tr_W(T))$ .

مطالبی که در ضمیمه های این درس آمده است برای فهم بقیه درس محاسبات و اطلاعات کوانتومی ضروری نیستند و خواننده می تواند از خواندن آنها صرف نظر کند.

## ۱۲ ضمیمه یک: تابع دلتای دیراک

تابع پیوسته زیر را در نظری می گیریم که در آن  $0 < \epsilon < 1$ .

$$\delta_{\epsilon}(x) := \begin{cases} 0 & x \leq -\epsilon \\ \frac{1}{2\epsilon} & -\epsilon \leq x \leq \epsilon \\ 0 & \epsilon \leq x \end{cases} \quad (۱۶۸)$$

این تابع دارای خاصیت های زیراست:

الف:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\epsilon}(x) dx = 1, \quad (169)$$

ب: برای هر تابعی که درفاصله  $(-\epsilon, \epsilon)$  متناهی باشد،

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\epsilon}(x) f(x) dx = f(0) + O(\epsilon) \quad (170)$$

که درآن  $O(\epsilon)$  کمیتی از مرتبه  $\epsilon$  است.

حد تابع  $\delta_{\epsilon}(x)$  را وقتی که  $\epsilon \rightarrow 0$  با تابع  $\delta(x)$  نشان می دهیم و قرار می دهیم

$$\delta(x) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_{\epsilon}(x). \quad (171)$$

و آن را تابع دلتای دیراک می نامیم. به خودی خود  $\delta(x)$  یک تابع نیست بلکه می توان به آن به عنوان یک عملگر نگاه کرد که تنها درزیر

یک انتگرال معنادارد.

درنتیجه خواهیم داشت:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0). \quad (172)$$

می توان تابع  $\delta(x-b)$  را به طور مشابه تعریف کرد. این تابع دارای خاصیت های زیراست:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-b) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-b) f(x) dx = f(b), \quad (173)$$

تابع دلتای دیراک را می توان به عنوان حد دنباله های دیگری از توابع نیز گرفت. درزیر چند تا از این دنباله هارا معرفی می کنیم.

**دنباله اول:** قرار می دهیم

$$g_{\sigma}(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad (174)$$

که نشان دهنده تابعی گاوسی با پهنای  $\sigma$  و ماکزیمم  $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$  در نقطه  $x = 0$  است. سطح زیرمنحنی آن نیز برابر است با ۱. در اینجا داریم

$$\delta(x) := \lim_{\sigma \rightarrow 0} g_{\sigma}(x). \quad (175)$$

**دنباله دوم: قراری دهیم**

$$\delta_T(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T e^{ix} dt = \frac{\sin Tx}{\pi x}. \quad (176)$$

داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_T(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} D_T(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy = 1. \quad (177)$$

برای این دنباله داریم

$$\delta(x) := \lim_{T \rightarrow \infty} D_T(x). \quad (178)$$

وازنجا به رابطه بسیار مهم زیر می رسم:

$$\delta(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dt. \quad (179)$$

بعضی دیگر از خواص تابع دلتا به شرح زیر هستند:

$$\begin{aligned} \delta(x - x') &= \delta(x' - x) \\ \int \delta'(x - x') f(x') dx' &= -\frac{df}{dx}(x). \end{aligned} \quad (180)$$

### ۱۳ ضمیمه دو: توابع دلتا به عنوان پایه ای برای فضای توابع

در این قسمت می خواهیم نشان دهیم که توابع دلتا را می توان به عنوان یک پایه برای فضای توابع در نظر گرفت. فضای توابع  $F[0, 1]$  را در نظر می گیریم. هیچ نوع فرض بخصوصی درباره این توابع نظیر پیوستگی یا مشتق پذیری نمی کنیم. این فضایی بی نهایت بعدی است. حال به

ازای هر عدد بزرگ  $N$  برای این فضا یک پایه درنظرمی گیریم که باتقریب خوبی می تواند فضای توابع را جاروب کند. سپس حد  $N \rightarrow \infty$  را درنظرمی گیریم که درآن توابع فضا با دقت توسط پایه تعریف شده نمایش داده می شوند. فاصله  $[0, 1]$  را به  $N$  قسمت تقسیم می کنیم. به این ترتیب داریم

$$[0, 1] = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_N \quad (181)$$

که درآن

$$\Delta_n := \left[ \frac{n-1}{N}, \frac{n}{N} \right] \quad (182)$$

توابع زیر را تعریف می کنیم:

$$e_n(x) := \begin{cases} N & x \in \Delta_n \\ 0 & x \notin \Delta_n \end{cases} \quad (183)$$

سطح زیراین توابع مساوی بایک است. این توابع بریکدیگر عمودند اما بهنجار نیستند:

$$\langle e_n, e_m \rangle \equiv \int_0^1 e_n^*(x) e_m(x) dx = N \delta_{m,n}. \quad (184)$$

هم چنین این خاصیت را دارند که به ازای هر تابع  $f \in F[0, 1]$  داریم:

$$\langle e_n, f \rangle \equiv \int_0^1 e_n^*(x) f(x) dx = N \int_{x \in \Delta_n} f(x) dx =: N \left( \frac{1}{N} f(x_n) \right) = f(x_n), \quad (185)$$

که درآن  $x_n \in \Delta_n$  نقطه ای درون  $\Delta_n$  است که باتقریب خوبی نشان دهنده مقدار تابع در ناحیه  $\Delta_n$  است، به عبارت دیگر:

$$f(x_n) := \frac{\int_{x \in \Delta_n} f(x) dx}{\frac{1}{N}} \quad (186)$$

حال  $N$  را به سمت بی نهایت میل می دهیم. دراین حالت اندیس  $n$  نیز جای خود را به یک اندیس پیوسته مثل  $y := \frac{n}{N}$  می دهد. تابع  $e_n(x)$  نیز مطابق با نمایشی که قبلاً درمورد توابع دیراک دیدیم به تابع دلتای دیراک یعنی  $\delta(x - y)$  میل می کند، شکل (1)

نحوه تبدیل کمیت ها درحد  $N \rightarrow \infty$  به شکل زیراست.

شکل ۱: در حد  $N \rightarrow \infty$ ، شاخص گسسته  $\frac{n}{N}$  به سمت شاخص پیوسته  $y$  و تابع  $e_n(x)$  به تابع  $\delta(x - y)$  میل می کند.

$$\frac{n}{N} \longrightarrow y$$

$$e_n(x) \longrightarrow \delta(x - y)$$

$$|e_n\rangle \longrightarrow |y\rangle$$

$$\langle x|e_n\rangle \longrightarrow \langle x|y\rangle$$

$$\langle e_n|e_m\rangle = \delta_{n,m} \longrightarrow \langle y|y'\rangle = \delta(y - y'). \quad (187)$$

تابع  $e_n$  را در این حالت به صورت برداری  $|y\rangle$  نشان می دهیم که نمایش برای آن به صورت  $|y\rangle$  است. رابطه (185) به شکل زیردرمی آید.

$$\langle y|f\rangle = \int_0^1 \delta(y - x)f(x)dx = f(y), \quad (188)$$

هرگاه در این حد  $N\delta_{m,n}$  را به عنوان تابع  $K(y, y')$  نشان دهیم که در آن  $y = \frac{n}{N}$  و  $y' = \frac{m}{N}$  هستند، از تساوی

$$\sum_n N\delta_{m,n} \frac{1}{N} = 1 \quad (189)$$

نتیجه می گیریم که

$$\int K(y, y') dy' = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_m N \delta_{m,n} \frac{\Delta y}{\Delta m} = \sum_m N \delta_{m,n} \frac{1}{N} = 1. \quad (190)$$

بنابراین  $K(y, y')$  همان تابع دلتای دیراک است و رابطه (184) را می بایست به صورت زیرنوشت:

$$\langle y | y' \rangle = \delta(y - y'). \quad (191)$$

یا

$$\int_0^1 dx \delta(x - y) \delta(x - y') dx = \delta(y - y'). \quad (192)$$

آنچه که می خواهیم در پایان این بخش روی آن تاکید کنیم آن است که یک تابع  $f \in F[0, 1]$  را به صورت یک بردارکت  $\langle f |$  یا برای  $|f\rangle$  نمایش می دهیم. مقدار این تابع یعنی  $f(x)$  تصویر آن روی بردار پایه  $|x\rangle$  است، یعنی

$$f(x) = \langle x | f \rangle. \quad (193)$$

رابطه (192) نیز به شکل زیر درمی آید:

$$\int_0^1 \langle y | x \rangle \langle x | y' \rangle dx = \langle y | y' \rangle, \quad (194)$$

و یا با برداشتن  $\langle y |$  و  $|y'\rangle$  از دو طرف

$$\int_0^1 |x\rangle \langle x| dx = I, \quad (195)$$

که در آن  $I$  عملگر همانی است.

باید تاکید کنیم که تنها برای سادگی فاصله  $[0, 1]$  را در نظر گرفتیم. این پایه برای فضای توابع  $F[a, b]$  و یا  $F(-\infty, \infty)$  نیز برقرار است. هم چنین راحتی این روابط به بیشتر از یک بعد نیز تعمیم می یابند.

## ۱۴ ضمیمه سه: تبدیل فوریه

فضای توابع مختلط درفاصله  $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$  رادرنظرمی گیریم. این فضا را با  $C[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$  نشان می دهیم. ضرب داخلی روی این فضا به شکل  $\langle f, g \rangle = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)g^*(x)dx$  تعریف شده است. توابع

$$e_n(x) := \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{2\pi i n x}{L}}, \quad n \in Z \quad (۱۹۶)$$

را درنظرمی گیریم. این توابع بریکدیگر عمود بوده و نرم همه آنها برابر با واحد است:

$$\langle e_n, e_m \rangle = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e_n^*(x)e_m(x)dx = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} e^{\frac{2\pi i m x}{L}} dx = \delta_{n,m}. \quad (۱۹۷)$$

علاوه براین، هر تابع دلخواه را می توان برحسب این توابع بسط داد:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e_n(x). \quad (۱۹۸)$$

ضرایب  $f_n$  را می توان به ترتیب زیر بدست آورد:

$$f_n = \langle e_n, f \rangle = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e_n^*(x)f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} f(x)dx. \quad (۱۹۹)$$

بنابراین مجموعه توابع  $\{e_n\}$  تشکیل یک پایه برای این فضا می دهند. با جایگزینی (199) در رابطه (198) بدست می آوریم

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e_n^*(y)f(y)dy e_n(x) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n(y)^* e_n(x) \right) f(y)dy \quad (۲۰۰)$$

مقایسه ای با رابطه (180) نشان می دهد که

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n(y)^* e_n(x) = \delta(x-y). \quad (۲۰۱)$$

این رابطه را رابطه کامل بودن پایه های  $\{e_n\}$  می گوئیم.

حال  $L$  را به سمت بی نهایت میل می دهیم. در این حالت توابع  $e_n(x)$  بخاطر عامل  $\frac{2\pi i n}{L}$  بسیار به هم نزدیک می شوند و در نتیجه بهتر است که آنها را بایک شاخص پیوسته یعنی  $k := \frac{2\pi n}{L}$  مشخص کنیم. علاوه بر آن اگر به همین شکل در این توابع حد  $L \rightarrow \infty$  را اعمال کنیم، به خاطر

عامل  $\frac{1}{\sqrt{L}}$  این توابع همگی صفرخواهند شد. بنابراین می بایستی توابع پایه جدید را ضمن جایگزینی شاخص گسسته  $\frac{2\pi n}{L}$  با شاخص پیوسته  $k$  در توابع اولیه در ضرب مشخصی نیز ضرب کنیم. توابع جدید را با  $\hat{e}_k(x)$  نشان می دهیم و قرار می دهیم

$$\hat{e}_k(x) := A e_n(x) \quad k := \frac{2\pi n}{L} \quad (202)$$

که در آن ضریب  $A$  می بایست تعیین شود. بهترین راه برای این کار توجه به کامل بودن پایه یعنی رابطه (201) است. این رابطه را به صورت زیر می توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n(y)^* e_n(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_n(y)^* e_n(x) \frac{\Delta n}{\Delta k} \Delta k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{C^2} \hat{e}_k(y)^* \hat{e}_k(x) \frac{L}{2\pi} \Delta k = \delta(x-y). \end{aligned} \quad (203)$$

این رابطه به مامی گوید که می بایست  $C$  را برابر با  $\sqrt{\frac{L}{2\pi}}$  بگیریم. باین جایگزینی خواهیم داشت:

$$\hat{e}_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \quad (204)$$

و رابطه (203) به شکل زیر درمی آید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{e}_k^*(x) \hat{e}_k(y) dk \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x-y)} dk = \delta(x-y). \quad (205)$$

باین جایگزینی روابط قبلی یک به یک تغییر می کنند. نخست به رابطه (198) نگاه می کنیم: از آنجا که شاخص  $n$  جای خود را به یک

شاخص پیوسته  $k = \frac{2\pi n}{L}$  داده است این رابطه به صورت زیر درمی آید:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e_n(x) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_n e_n(x) \frac{\Delta n}{\Delta k} \Delta k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_n e_n(x) \frac{L}{2\pi} \Delta k = \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{f}(k) \hat{e}_k(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{f}(k) dk. \end{aligned} \quad (206)$$

که در آن  $\hat{f}(k) := \sqrt{\frac{L}{2\pi}} f_n$  از رابطه بالا می توانیم با توجه به رابطه (199)،  $\hat{f}(k)$  را بر حسب  $f(x)$  بدست آورد:

$$\hat{f}(k) \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}} f_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx. \quad (207)$$

جفت روابط

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{f}(k) dk \\ \hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx. \end{aligned} \quad (208)$$

رایک تبدیل فوری در فضای توابع یک متغیره می گویند. این روابط به صورت زیر به فضای  $n$  بعدی تعمیم می یابند.

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik \cdot x} \hat{f}(k) d^n k \\ \hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik \cdot x} f(x) d^n x. \end{aligned} \quad (209)$$

## ۱۵ مسئله ها:

۱ - تجزیه قطبی ماتریس  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  را بدست آورید.

۲ - تجزیه مقدار منفرد ماتریس  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  را بدست آورید.

۳ - یک ماتریس روی ضرب تانسوری دو فضای دوبعدی به صورت زیر تعریف شده است:

$$T = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}. \quad (210)$$

رد های جزئی این عملگر را بدست آورید.

۴ - در یک فضای  $d$  بعدی  $V$  که بردارهای پایه اش را با  $\{|j\rangle, j = 0, 1, \dots, d-1\}$  نشان می دهیم عملگرهای  $X$  و  $Z$  به صورت زیر تعریف می شوند:

$$X|j\rangle := |j+1\rangle \mod d, \quad Z|j\rangle := \omega^j|j\rangle \quad (211)$$

که در آن  $\omega := e^{\frac{2\pi i}{d}}$ .

الف: ویژه بردارهای عملگرهای  $X$ ،  $Z$  و  $XZ$  را بدست آورید.

ب: نشان دهید که  $ZX = \omega XZ$ .

ج: طیف عملگر  $X + X^{-1}$  را بدست آورید.

د: حالت های زیر را در نظر بگیرید:

$$|\phi_{m,n}\rangle := \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_j \omega^{jn} |j, j+m\rangle \quad (212)$$

و نشان دهید که این حالت ها یک پایه متعامد بهنجار برای فضای  $V \otimes V$  می سازند. هم چنین نشان دهید که برای همه این حالت ها تساوی زیر برقرار است:

$$\text{tr}_V(|\phi_{m,n}\rangle\langle\phi_{m,n}|) = \frac{1}{d}I. \quad (213)$$

این حالت ها، حالت های تعمیم یافته بل<sup>۸</sup> نامیده می شوند.

---

<sup>۸</sup>Generalized Bell States